Lycée international Jean-Mermoz

Correction
IE de mathématiques 1eS
Vecteurs et équations de droites
vendredi 14 octobre 2016, 50 minutes

mission laïque côte d'ivoire

Lire attentivement les énoncés des 8 questions notées sur 20 points au total. Lever la main en silence s'il y a des questions. Il faut montrer les calculs effectués même si la calculatrice est autorisée.

Questions de cours

Question n° 1 [1 pt.]

En se plaçant dans le repère $(O\,;\ \vec{i}\,,\ \vec{j}\,)$ que signifie « $\vec{w}$ a pour coordonnées (a, b) » ?

Réponse: Dans le repère $(O\,;\ \vec{i}\,,\ \vec{j}\,)$, « $\vec{w}$ a pour coordonnées (a, b) » signifie : $\vec{w} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j}$

Question n° 2 [1 pt.]

Énoncer une condition sur les coordonnées de deux vecteurs $\vec{u}\,(x\,;\,y)$ et $\vec{v}\,(a\,;\,b)$ pour qu'ils soient colinéaires.

Réponse: Soit $\vec{u}\,(x\,;\,y)$ et $\vec{v}\,(a\,;\,b)$ deux vecteurs. Ils sont colinéaires si leurs coordonnées vérifient l'égalité :

$$xb - ya = 0$$

Question n° 3 [1 pt.]

Que peut-on dire du vecteur $\vec{0}$ en terme de colinéarité ?

Réponse: Le vecteur $\vec{0}$ est colinéaire à tous les vecteurs.

Question n° 4 [1 pt.]

(a) Donner une équation de droite dont le vecteur $\vec{u}\,(m\,;\,p)$ est un vecteur directeur.

Réponse: La droite d d'équation $px - my + c = 0$ avec c un nombre quelconque à pour vecteur directeur $\vec{u}\,(m\,;\,p)$.

(b) Donner un autre vecteur directeur ($\neq \vec{0}$) de cette droite.

Réponse: La droite d a pour vecteur directeur tous les vecteurs de la forme $k\,\vec{u}$ où k est un nombre quelconque. Donc par exemple si $k = 2$, le vecteur $(2m\,;\,2p)$ est un vecteur directeur de d.

Application

Question n° 5 [3 pts.]

Dans chacun des cas suivants montrer si les points A, L et G sont alignés ou non.

(a) $A\left(-\frac{1}{2}\,;\,\frac{3}{4}\right)$, $L\,(2\,;\,-3)$ et $G\left(\frac{1}{4}\,;\,\frac{7}{4}\right)$.

Réponse:

Calculons les coordonnées de $\overrightarrow{AL}$ et $\overrightarrow{AG}$

$$\overrightarrow{AL} = (x_L - x_A\,;\,y_L - y_A) = \left(2 - \left(-\frac{1}{2}\right)\,;\,-3 - \frac{3}{4}\right) = \left(\frac{5}{2}\,;\,-\frac{15}{4}\right)$$
$$\overrightarrow{AG} = \left(\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right)\,;\,\frac{7}{4} - \frac{3}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\,;\,1\right)$$

Vérifions la condition de colinéarité : $x_{AL}.y_{AG} - y_{AL}.x_{AG} = 0$

$$\frac{5}{2} \times 1 - \left(\frac{-15}{4}\right) \times \frac{3}{4} = \frac{5}{2} + \frac{45}{4} > 0 \text{ donc } \neq 0$$

La condition n'est pas vérifiée. Les vecteurs $\overrightarrow{AL}$ et $\overrightarrow{AG}$ ne sont pas colinéaires. Les points A, L et G ne sont donc pas alignés.

(b) $A\left(\sqrt{2}\,;\,6\right)$, $L\left(3\sqrt{2}\,;\,-1\right)$ et $G\left(4\sqrt{2}\,;\,13\sqrt{2}\right)$.

Réponse: En utilisant la même démarche que précédemment, on montre

$$\overrightarrow{AG} = \left(3\sqrt{2}\,;\,13\sqrt{2} - 6\right) \text{ et } \overrightarrow{AL} = \left(2\sqrt{2}\,;\,-7\right)$$

puis,

$$3\sqrt{2} \times (-7) - (13\sqrt{2} - 6) \times 2\sqrt{2} \neq 0.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AL}$ ne sont pas colinéaires. Les points A, L et G ne sont donc pas alignés.

Question n° 6 [3 pts.]

Calculer m pour que les droites d et Δ soient parallèles.

(a) $d : 3x - 4y + 7 = 0$ et $\Delta : -\frac{1}{2}x + my + 3 = 0$

Réponse: Si les droites d et Δ sont parallèles, c'est que leur vecteurs directeurs sont colinéaires.
$\overrightarrow{u}\,(4\,;\,3)$ est un vecteur directeur de d.
$\overrightarrow{v}\left(-m\,;\,-\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)$ est un vecteur directeur de Δ.
Puisque $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ doivent être colinéaires, m doit vérifier l'équation :

$$4\times\left(-\frac{1}{2}\right)-3\times(-m)=0$$
$$m=\frac{2}{3}$$

Les droites d et Δ sont parallèles lorsque $m=\dfrac{2}{3}$

(b) $d:\ -7x-3y-5=0$ et $\Delta:\ mx+y-1=0$

Réponse: En utilisant la même méthode que précédemment on montre : $\overrightarrow{u}\,(3\,;\,-7)$ et $\overrightarrow{v}\,(-1\,;\,m)$. Puis on calcule $m=\dfrac{7}{3}$.
Les droites d etΔ sont parallèles lorsque $m=\dfrac{7}{3}$.

Question n° 7 [3 pts.]

Donner l'équation de la droite parallèle à d et qui passe par le point A.

(a) $d:\ -\dfrac{3}{2}x+5y-17=0$ et $A\left(-\dfrac{7}{3}\,;\,\dfrac{5}{2}\right)$.

Réponse: Soit Δ une droite parallèle à la droite d.
Δ a aussi pour vecteur directeur $\left(-5\,;\,-\dfrac{3}{2}\right)$ et elle a une équation de la forme :

$$-\frac{3}{2}x+5y+c=0 \text{ avec } c\in\mathbb{R}$$

Si $A\in\Delta$, alors :

$$-\frac{3}{2}\left(-\frac{7}{3}\right)+5\times\frac{5}{2}+c=0$$
$$c=-16$$

$-\dfrac{3}{2}x+5y-16=0$ est l'équation de la droite parallèle à d et qui passe par A.

(b) $d:\ x=-\pi/3$ et $A(0\,;\,-4)$

Réponse: On remarque que :

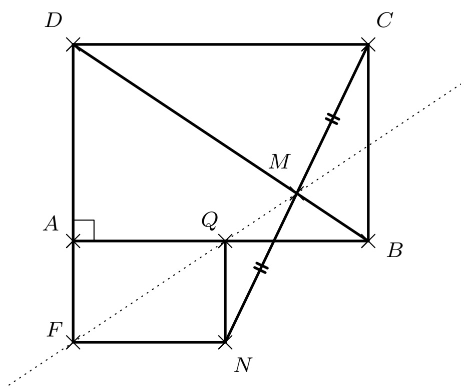
- $d : x = -\dfrac{\pi}{3}$ est une droite parallèle à l'axe des ordonnées.
- L'abcisse du point A est 0.

La droite Δ parallèle à d et passant par A est donc l'axe des ordonnées lui même.

Problème

Question n° 8 [7 pts.]

Démontrer que les points F, M et Q sont alignés et que la droite (FQ) garde une direction fixe quelque soit le point M choisi.



- $ABCD$ est un rectangle.
- M est un point du segment $[BD]$ distinct de B et D.
- Le point N est le symétrique de C par rapport à M.
- La parallèle à (AB) passant par N coupe (AD) en F.
- La parallèle à (AD) passant par N coupe (AB) en Q.

(a) Pour les deux sous-questions suivantes, on suppose connues les coordonnées $(a\,;\,b)$ du point N.

i. Dans quel repère est-il plus évident d'exprimer les coordonnées des points A, B, C, D, Q et F ?

Réponse: Pour moi, il est plus facile d'exprimer les coordonnées des points A, B, C, D, Q et F dans le repère $(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, car dans ce repère, les coordonnées des points A, B, C et D sont triviales. Quant-a celles de Q et F on peut les trouver grâce à celles de N qui sont supposées connues.

ii. En utilisant le repère que vous trouvez le plus évident, exprimer les coordonnées des points A, B, C, D, Q et F ?

Réponse: Dans le repère $(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$:

$$A(0\,;\,0),\ B(1\,;\,0),\ C(1\,;\,1),\ D(0\,;\,1),\ Q(a\,;\,0) \text{ et } F(0,b)$$

(b) On se place maintenant dans le repère $(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ et on pose m l'abscisse du point M.

i. Trouver l'ordonnée de M en fonction de m. *(Aidez-vous pour cela de l'alignement des points D, M et B.)*

Réponse: Soit $(m\,;\,y)$ les coordonnées du point M.
M est un point du segment $[BD]$.
Les points B, M, D sont donc alignés.
Les vecteurs $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BM}$ sont colinéaires et $\overrightarrow{BD} = (-1\,;\,1)$, $\overrightarrow{BM} = (m-1\,;\,y)$
Donc y doit vérifier :

$$\begin{aligned} -1 \times y - 1 \times (m-1) &= 0 \\ 1 - m &= y \end{aligned}$$

L'ordonnée du point M est $1-m$.

ii. Démontrer que les coordonnées du point N sont $(2m-1\,;\,-2m+1)$.

Réponse: Soit $(x\,;\,y)$ les coordonnées du point N.
Puisque N est le symétrique de C par rapport à M on a :

$$\begin{array}{ccc} \overrightarrow{CM} & = & \overrightarrow{MN} \\ (m-1\ ;\ 1-m-1) & = & (x-m\ ;\ y-(1-m)) \end{array}$$

d'où les équations :

$$\begin{cases} m-1 = x-m & \Leftrightarrow x = 2m-1 \\ 1-m-1 = y-(1-m) & \Leftrightarrow y = -2m+1 \end{cases}$$

Les coordonnées du point N sont $x = 2m-1$ et $y = -2m+1$

iii. Vérifier que les points F, Q, M sont alignés.

Réponse: Le point Q a pour coordonnées $(2m-1\,;\,0)$.
Le point F a pour coordonnées $(0\,;\,-2m+1)$.
Calculons :

$$\overrightarrow{FQ} = (-2m+1\,;\,-(-2m+1)) = (2m-1\,;\,2m-1)$$
$$\overrightarrow{QM} = (m-(2m-1)\,;\,1-m) = (-m+1\,;\,-m+1)$$

On remarque que $(2m-1)\times(-m+1) = (2m-1)\times(-1+m)$.
Les vecteurs sont colinéaires et les points F, Q, M sont donc alignés.

iv. Montrer que $\overrightarrow{MF}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Réponse: Calculons :

$$\overrightarrow{MF} = (-m\,;\,-2m+1-(1-m)) = (-m\,;\,-m)$$
$$\overrightarrow{AC} = (1\,;\,1)$$

On remarque que $\overrightarrow{MF} = -m\overrightarrow{AC}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{MF}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont donc colinéaires.

v. Concluez.

Réponse: Les droites (MF) et (FQ) sont confondues car les points M, F, Q sont alignés.
Par ailleurs, puisque $\overrightarrow{AC}$ est colinéaire à $\overrightarrow{MF}$, c'est un vecteur directeur de (MF) et ainsi de (FQ), or $\overrightarrow{AC}$ est constant. Il ne dépend pas de la position du point M.
Conclusion, (FQ) garde une direction fixe quelque soit le point M choisi.